

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Locală, județul Timiș**  
**7.02.2025**

**clasa a VII-a**  
**Barem de corectare și notare**

1. a) Demonstrați că numărul  $A = 2025 - \frac{1+2+3+4+\dots+2025}{\sqrt{1+3+5+7+\dots+2025}}$  este natural.

b) Fie  $x$  și  $y$  numere reale nenule astfel încât  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2025}$ .

Calculați  $\sqrt{(x-2025) \cdot (y-2025)}$ .

**Soluție:**

$$\begin{aligned} \text{a) } 1 + 2 + 3 + \dots + 2025 &= \frac{2025 \cdot 2026}{2} = 2025 \cdot 1013 \dots\dots\dots 1\text{p} \\ 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2025 &= 1013^2 \dots\dots\dots 1\text{p} \\ A = 2025 - \frac{2025 \cdot 1013}{\sqrt{1013^2}} &= 2025 - 2025 = 0 \in N \dots\dots\dots 1\text{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{2025} \Rightarrow \frac{x+y}{x \cdot y} = \frac{1}{2025} \Rightarrow x \cdot y = 2025(x+y) \Rightarrow xy - 2025(x+y) = 0 \dots\dots\dots 2\text{p} \\ (x-2025)(y-2025) &= xy - 2025(x+y) + 2025^2 = 2025^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{(x-2025) \cdot (y-2025)} &= 2025 \dots\dots\dots 2\text{p} \end{aligned}$$

2. a) Arătați că  $A = \sqrt{n^{20} + n^{24}}$  este irațional pentru orice  $n$  număr natural nenul.

b) Determinați numerele naturale  $n$  pentru care numărul  $a = \sqrt{11 - \sqrt{11 - \sqrt{11 + n}}}$  este rațional.

**Soluție:**

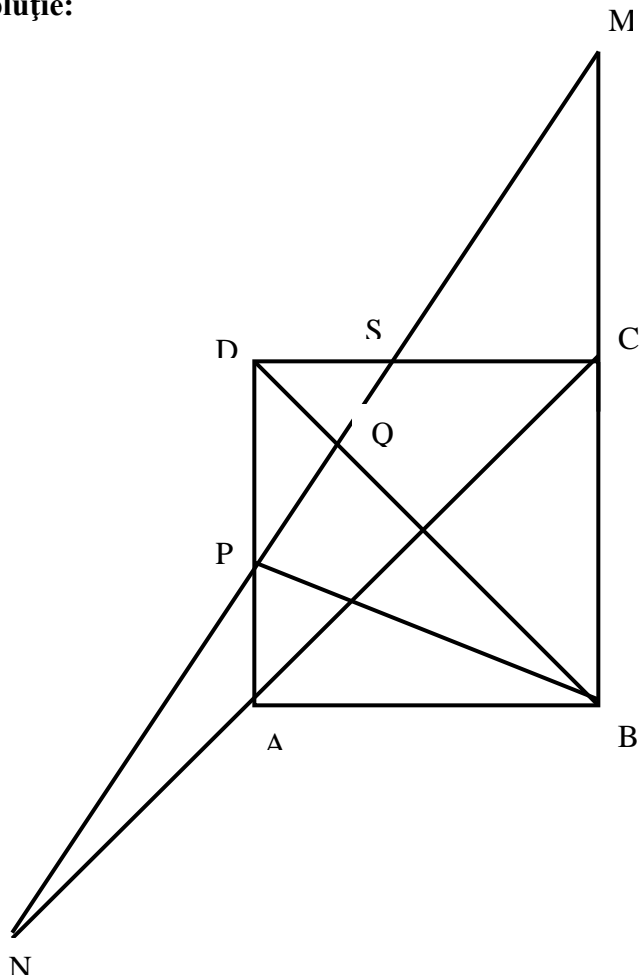
$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sqrt{n^{20} + n^{24}} = \sqrt{n^{20}(1 + n^4)} = n^{10} \sqrt{1 + n^4} \dots\dots\dots 1\text{p} \\ n^4 &\text{ e pătrat perfect, deci } n^4 + 1 \text{ nu poate fi pătrat perfect ( nu există două pătrate perfecte consecutive, exceptând 0 și 1) } \dots\dots\dots 1\text{p} \\ \text{Deci, } \sqrt{1 + n^4} &\text{ este irațional pentru orice } n \in N^*, \text{ și cum } n^{10} \in Q \Rightarrow A = n^{10} \sqrt{1 + n^4} \text{ este irațional pentru orice } n \in N^* \dots\dots\dots 1\text{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a \in Q &\Rightarrow \sqrt{11 - \sqrt{11 + n}} = 11 - a^2 = b \in Q, 0 \leq b \leq 11 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{11 + n} &= 11 - b^2 \in Q, \sqrt{11} \leq \sqrt{11 + n} \leq 11 \Rightarrow 11 + n = k^2, k \in N, 11 \leq k^2 \leq 11^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 &\leq k \leq 11 \dots\dots\dots 2\text{p} \\ b = \sqrt{11 - k} &\in Q \Rightarrow 11 - k = l^2, l \in N; 0 \leq l^2 = 11 - k \leq 11 - 4 = 7 \Rightarrow 0 \leq l \leq 2 \\ a = \sqrt{11 - l} &\Rightarrow 11 - l = m^2, m \in N; 11 \geq m^2 = 11 - l \geq 9 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow l = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow k &= 7 \Rightarrow n = 7^2 - 11 = 38 \dots\dots\dots 2\text{p} \end{aligned}$$

3. Fie  $ABCD$  un pătrat. Notăm cu  $M$  simetricul lui  $B$  față de  $C$ . Pe semidreapta  $[CA$  se consideră punctul  $N$  astfel încât  $\angle NMB = 30^\circ$ . Dreapta  $MN$  intersectează  $AD$  și  $BD$  în punctele  $P$ , respectiv  $Q$ . Arătați că  $BP = BQ$ .

*Gazeta Matematică, Nr.10/2024*

**Soluție:**



Fie  $MN \cap DC = \{S\}$ ;

$ABCD$  pătrat  $\Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow DP \parallel MC \Rightarrow \angle DPS = \angle SMC = 30^\circ$  ( alterne interne ).....1p

În  $\triangle SCM$  dreptunghic cu  $\angle SMC = 30^\circ$  avem că  $SC = \frac{MS}{2} \Rightarrow MS = 2SC$  .....1p

Analog în  $\triangle PDS$  dreptunghic avem că  $DS = \frac{PS}{2}$ , adică  $PS = 2DS$  .....1p

$MP = MS + PS = 2SC + 2DS = 2(SC + DS) = 2CD = 2BC = BM$  .....1p

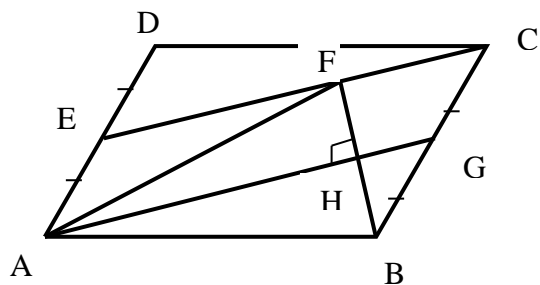
Deci,  $\triangle MBP$  e isoscel cu  $\angle MBP = \angle MPB = (180^\circ - 30^\circ):2 = 75^\circ$  (1).....1p

$\angle DSP = \angle MSC = 60^\circ$  ( opuse la vârf ),  $\angle SDQ = \angle CDB = 45^\circ$ ; în  $\triangle DQS$ ,  
 $\angle DQS = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$ ;  $\angle PQB = \angle DQS = 75^\circ$  ( opuse la vârf ) (2).....1p

În concluzie, din (1) și (2) rezultă că  $\angle QPB = \angle PQB = 75^\circ \Rightarrow \triangle PQB$  e isoscel, deci  $BP = BQ$ .....1p

4. Fie  $ABCD$  paralelogram, punctul  $E$  mijlocul laturii  $AD$  și punctul  $F$  pe segmentul  $EC$  astfel încât  $AF = AB$ . Demonstrați că  $BF \perp EC$ .

**Soluție:**



Fie  $G$  mijlocul lui  $BC \Rightarrow EA = CG$  dar  $EA \parallel CG \Rightarrow AECG$  e paralelogram  $\Rightarrow AG \parallel EC$  .....2p  
 Fie  $\{H\} = AG \cap BF \Rightarrow HG \parallel CF$  și cum  $G$  e mijlocul lui  $BC \Rightarrow HG$  e linie mijlocie în  $\triangle BFC$  .....1p  
 $H$  e mijlocul lui  $BF \Rightarrow AH$  e mediană în  $\triangle ABF$ . Cum  $\triangle ABF$  e isoscel  $\Rightarrow AH$  este și înălțime .....2p  
 $AH \perp BF \Rightarrow BF \perp AG$ , dar  $AG \parallel EC \Rightarrow BF \perp EC$  .....2p